Моделирование жёстких гибридных систем с односторонними событиями в инструментальной среде ИСМА*

Е. А. Новиков[1], Ю. В. Шорников[2]
[1]*Институт вычислительного моделирования СО РАН, Красноярск, Россия*
[2]*Новосибирский государственный технический университет, Россия*
e-mail: `novikov@icm.krasn.ru, shornikov@inbox.ru`

Рассмотрены особенности компьютерного анализа гибридных систем в инструментальной среде ИСМА. Приведены классы математических моделей непрерывного поведения гибридных систем, символьная и графическая спецификации обозначенного класса и особенности численной реализации с учётом жёсткости и односторонности событий.

Ключевые слова: гибридная система, структурная схема, импорт данных, жёсткие режимы, событийная функция, дифференциально-алгебраические уравнения, неявные задачи.

Введение

Для качественного описания довольно большого класса практических задач требуется учитывать как непрерывное, так и дискретное поведение динамических систем. Современная теория гибридных систем (ГС) является универсальным аппаратом математического описания сложных дискретно-непрерывных процессов различной физической природы. Рассматриваемые задачи спецификации и эффективного численного анализа динамических и гибридных систем относятся к категории фундаментальных [1, 2]. Программная система ИСМА [3] для эффективной реализации моделей из обозначенного класса наполнена графическими и текстовыми входными языками предметного описания таких приложений, как электромеханика, электроэнергетика, автоматика, химическая кинетика, биология и др. Эффективные оригинальные алгоритмы машинного анализа в идеологии гибридного моделирования рассматриваются для различных приложений в соответствии с выбранными классами жёстких и нежёстких задач в условиях односторонних событий.

1. Задача Коши

Класс динамических систем и непрерывные поведения ГС представлены в ИСМА задачей Коши с запаздывающим аргументом

$$\dot{x} = f\left[x\left(t\right), x\left(t-\tau\right), t\right], x\left(t_0\right) = x_0, \tag{1}$$

*Работа выполенена при частичной финансовой поддержке РФФИ (грант № 11-01-00106-а и № 14-01-00047) и Президиума РАН (проект № 15.4).

где $x(t) = \varphi(t)$ при $t \in [t_0 - \tau,\ t_0)$, $x \in R^n$ — вектор состояния, $\varphi \in R^r$ — вектор-функция запаздывания; $r \leq n$; t — независимая переменная; $t \in [t_0, t_k]$; $\tau = \{\tau_1, ..., \tau_r\}^T$ — вектор чистых запаздываний; $f : R \times R^n \to R^n$ — нелинейная вектор-функция, удовлетворяющая условию Липшица. В отличие от передовых мировых аналогов, например системы Simulink/MATLAB, особенностью ИСМА является возможность импорта данных непосредственно в программную модель на оригинальном графическом языке структурных схем [4]. Многие пользователи подготавливают и хранят данные в файлах внешних приложений формата MS Excel. Это связано в первую очередь с удобством представления и обработки данных. В ИСМА реализованы средства импорта массива точек из Excel, что позволяет свободно манипулировать данными. Импорт осуществляется через интерфейс нелинейного блока. В качестве иллюстрации импорта данных рассмотрим задачу моделирования электропогрузчика [5]. Программная модель тягового электропривода электропогрузчика представлена на рис. 1. Здесь выделенный нелинейный блок $f(x)$ реализует изменение момента двигателя. Изменения регистрировались с помощью специальной аппаратуры.

После обработки данных в Excel потребовалось в нелинейную функцию модели ввести массив из 5000 точек в формате внешнего приложения. Массив экспериментальных точек из внешнего приложения MS Excel введён программно [4] как последовательность

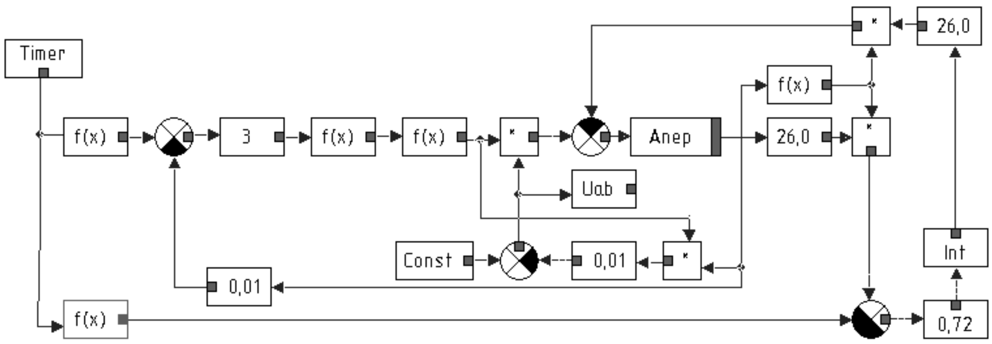

Рис. 1. Программная модель электропривода

а *б*

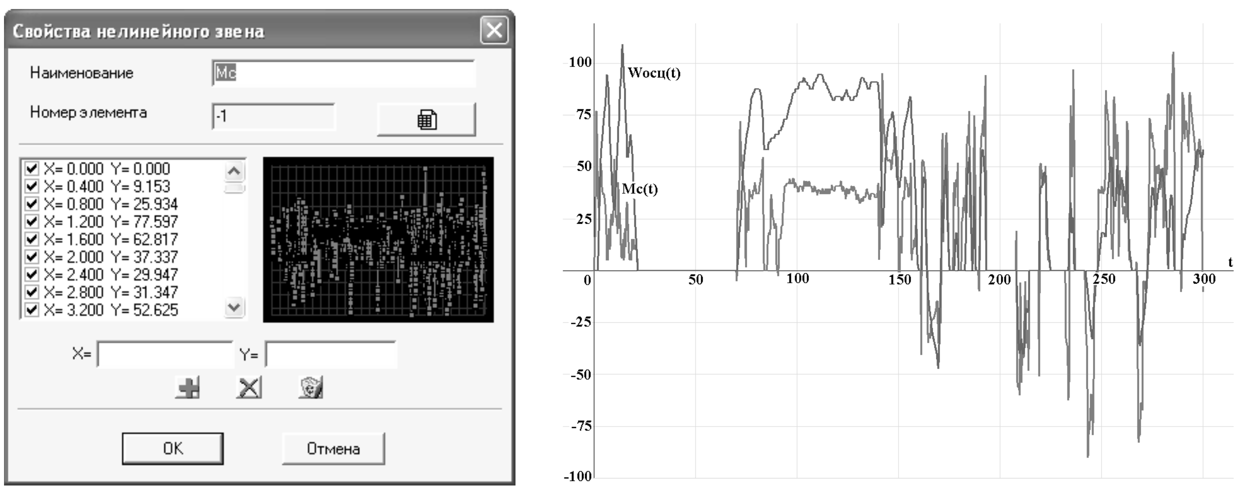

Рис. 2. Изменение момента двигателя (*а*) и переходные процессы двигателя (*б*)

значений динамики момента двигателя (рис. 2, *а*). Результаты машинных экспериментов с импортированными в компьютерную модель данными приведены на рис. 2, *б*.

Под этот же класс систем (1) подпадают задачи химической кинетики. Для спецификации задач химической кинетики разработан язык LISMA+ [6], являющийся расширением базового языка спецификации динамических и гибридных систем LISMA [7]. Представим порождающую грамматику химических реакций $G\,[C]$ в виде $C \to SC\,|S$ и $S \to E_S a E_S$, где S — стадии химической реакции; E_S — подмножество арифметических выражений; $a \in \Sigma^*$ — символ итерации терминального алфавита основной грамматики $G\,[E]$. Символ итерации однозначно определяется терминальной цепочкой $a \to id \geq |\varepsilon$ с идентификатором id соответствующей скорости стадий. Значение E_S выбирается так, чтобы выполнялось условие $G\,[E_S] \subseteq G[E]$. Тогда необходимо, чтобы продукции новой грамматики имели вид $E_S \to T\,|T + E_S$, $T \to O\,|O * T$ и $O \to id\,|c$. Здесь id — идентификатор реагента химической реакции, представляет собой запись переменной без индекса и поэтому не противоречит общепринятой в $G[E]$ записи простых переменных; $c = \mathrm{const}$ или целое без знака, которое означает число реагентов в реакции. С учётом вложенности для расширенной грамматики $G\,[E_S]$ используются наследуемые однозначные методы анализа, что и для базовой грамматики $G[E]$. Поэтому не требуется доработки языкового процессора системы ИСМА в целом. Этим примером показано важное решение задачи унификации математического и программного обеспечения в рамках разработанной инструментальной среды.

2. Дифференциально-алгебраические задачи

При описании ГС с непрерывным поведением в классе дифференциально-алгебраических уравнений, разрешённых относительно производной, ограничимся уравнениями вида

$$y' = f\,(t, x, y)\,, \quad x = \varphi\,(t, x, y)\,, \quad pr : g\,(t, x, y) < 0,$$

$$\begin{gathered} t \in [t_0, t_k]\,, \quad x \in R^{N_X}, \quad y \in R^{N_Y}, \quad x\,(t_0) = x_0, \quad y\,(t_0) = y_0, \\ f : R \times R^{N_X} \times R^{N_Y} \to R^{N_Y}, \quad \varphi : R \times R^{N_X} \times R^{N_Y} \to R^{N_X}, \\ g : R \times R^{N_X} \times R^{N_Y} \to R^S, \quad S \leq N_Y. \end{gathered} \tag{2}$$

В (2) использованы принятые при описании ГС обозначения предиката pr, событийной функции $g(t, x, y)$ и т. д. Существует множество приложений в этом классе, в том числе задачи диффузии, описываемые уравнениями в частных производных. Например, модель конкуренции Лотки — Вольтерра на основе системы реакции — диффузии в двухмерном пространстве представлена уравнениями [8]

$$\frac{\partial c^i}{\partial t} = d_i \left(\frac{\partial^2 c^i}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 c^i}{\partial z^2} \right) + f^i\left(c^1,\ c^2\right), \tag{3}$$

где $d_1 = 0.05$, $d_2 = 1.0$, $a_{11} = 10^6$, $a_{12} = 1$, $a_{21} = 10^6 - 1$, $a_{22} = 10^6$, $b_1 = b_2 = 10^6 - 1 + 10^{-6}$, $f^1\,(c^1, c^2) = c^1\,(b_1 - a_{11}c^1 - a_{12}c^2)$, $f^2\,(c^1, c^2) = c^2\,(b_2 - a_{21}c^1 - a_{22}c^2)$. Граничные условия $\partial c^i/\partial x = 0$ при $x = 0$, $x = 1$ и $\partial c^i/\partial z = 0$ при $z = 0$, $z = 1.8$. Начальные условия имеют вид

$$\begin{gathered} c^1\,(x, z, 0) = 500 + 250 \cos{(\pi x)} \cos{(10\pi z/1.8)}\,, \\ c^2\,(x, z, 0) = 200 + 150 \cos{(10\pi x)} \cos{(\pi z/1.8)}\,. \end{gathered}$$

```
// Начальные условия
y1 = 7.5000E+2;
y2 = 3.5000E+2;
// ...
// Дифф. уравнения
y1' = 8.0000E-1*(y3-2.0*y1+y3)+2.4691E-1*(y11-2.0*y1+y11)+
      y1*((1.0E6-1.0+1.0E-6)-1.0E6*y1-1.0*y2);
y2' = 1.6000E+1*(y4-2.0*y2+y4)+4.9383E+0*(y12-2.0*y2+y12)+
      y2*((1.0E6-1.0+1.0E-6)-(1.0E6-1.0)*y1-1.0E6*y2);
// ...
```

Рис. 3. Фрагмент текстовой модели

С учётом приведённых значений параметров и начальных условий решение этой реакционно-диффузионной системы сходится при $t \to \infty$ к решению $c^1 = c^1_* \equiv 1 - 10^{-6}$, $c^2 = c^2_* \equiv 10^{-6}$.

Перейдём к сетке размером $J \times K$, соответственно по x и z получаем шаги $\Delta x = 1/(J-1)$ и $\Delta z = 1.8/(K-1)$, где c^i_{jk} — аппроксимация $c^i\,(x_j, z_k, t)$, $x_j = (j-1)\,\Delta x$, $z_k = (k-1)\,\Delta z$, $1 \le j \le J$, $1 \le k \le K$. В результате получим систему уравнений размерности $N = 2JK$, причем

$$\dot{c}^i_{jk} = \frac{d_i}{\Delta x^2}\left(c^i_{j+1,k} - 2c^i_{jk} + c^i_{j-1,k}\right) + \frac{d_i}{\Delta z^2}\left(c^i_{j,k+1} - 2c^i_{jk} + c^i_{j,k-1}\right) + f^i_{jk},$$

где $1 \le i \le 2$, $1 \le j \le J$, $1 \le k \le K$, $f^i_{jk} = f^i\left(c^1_{jk}, c^2_{jk}\right)$. Граничные условия на сетке имеют вид $c^i_{0,k} = c^i_{2,k}$, $c^i_{J+1,k} = c^i_{J-1,k}$ для $1 \le k \le K$ и $c^i_{j,0} = c^i_{j,2}$, $c^i_{j,K+1} = c^i_{j,K-1}$ для $1 \le j \le J$.

При построении компьютерной модели от тройного индекса i, j и k перейдём к индексу $m = i + 2\,(j-1) + 2J\,(k-1)$. Получим текстовую модель (фрагмент на рис. 3). Система (3) рассчитывалась при размерностях от 50 до 1800 уравнений. За разумное время решение удалось получить только явными и полуявными схемами из библиотеки оригинальных методов (см. таблицу).

Т а б л и ц а 1. Численные методы в системе ИСМА

Алгоритм	Характеристика
DISPF	Алгоритм переменного порядка с контролем устойчивости (максимальный порядок точности 5)
RADAU5	Неявный метод анализа жёстких режимов
DISPF1_, RADAU5	Метод DISPF в комбинации с RADAU5
STEKS	Явный метод четвёртого порядка с контролем устойчивости на основе метода Мерсона
DP78ST	Явный метод восьмого порядка с контролем устойчивости на основе метода Дорманда—Принса
DISPF	Алгоритм переменного порядка с контролем устойчивости (максимальный порядок точности 3)
RK2ST, RK3ST	Явные методы 2-го и 3-го порядка с контролем точности и устойчивости
MK22, MK21	Второй порядок точности, “замораживание” матрицы Якоби, жёсткие режимы

Особенность решения состоит в том, что в начале интервала интегрирования оно меняется быстро, а далее — очень медленно. Из явных схем переменного порядка и шага с контролем точности и устойчивости вычислений наилучшие результаты показал алгоритм DISPF, который использует метод пятого порядка в начале интегрирования и шестистадийный метод первого порядка с расширенной областью устойчивости на участке с медленно меняющимся решением. Полуявные L-устойчивые методы МК22 и МК21 более эффективны, чем явные схемы. Их эффективность обусловлена L-устойчивостью и замораживанием матрицы Якоби.

Таким образом, традиционно используемые неявные схемы для исследования жёстких режимов могут оказаться бесполезными по двум причинам. Во-первых, в задачах высокой размерности для декомпозиции матрицы Якоби может потребоваться недоступно большое время для современных процессоров. Во-вторых, как показали проведённые исследования [9], если жёсткая модель высокой размерности является гибридной, применение неявных схем приводит к неверному глобальному решению. В связи с этим для эффективного анализа таких систем в библиотеку методов ИСМА включены разработанные оригинальные явные схемы с контролем устойчивости и L-устойчивые полуявные методы, которые дополнены алгоритмом корректного обнаружения событий.

3. Неявные задачи

При моделировании электрических цепей, электроэнергетических процессов и во многих других приложениях возникает необходимость численного решения жёстких систем дифференциально-алгебраических уравнений, неразрешённых относительно производной:

$$
\begin{gathered}
F\,(x,\, x',\, t) = 0, \quad pr:\, g\,(x,\, x',\, t) < 0, \\
t \in [t_0, t_k]\,, \quad x\,(t_0) = x_0, \\
F:\, R^N \times R^N \times R \to R^N, \quad g:\, R^N \times R^N \times R \to R.
\end{gathered} \tag{4}
$$

Современные численные методы обычно предполагают задание явной зависимости производной от решения. Приведение неявной задачи к разрешённому виду порождает дополнительные вычислительные затраты. В библиотеку ИСМА включён оригинальный L-устойчивый алгоритм решения неявных задач [10] на основе схемы типа Розенброка. В данном алгоритме разрешение задачи относительно производной и обеспечение L-устойчивости осуществляется одновременно. Задачу (4) можно записать в виде

$$
x' = y, F(x,y,t) = 0, \quad x(t_0) = x_0, \quad y(t_0) = y_0.
$$

Дополнительное условие $y(t_0) = y_0$ можно вычислить, например, решая задачу $F(x_0, y) = 0$ на установление. Тогда метод типа Розенброка для решения этой задачи записывается в виде

$$
\begin{gathered}
x_{n+1} = x_n + k_1^x, \quad y_{n+1} = y_n + k_1^y, \\
D_n k_1^x = h(F_{ny} - F_n), \quad k_1^y = \frac{1}{ah}(k_1^x - hy_n), \\
D_n = F_{ny} + ahF_{nx}, \quad F_{ny} = \partial F(y_n, x_n, t_n)/\partial y, \\
F_{nx} = \partial F(y_n, x_n, t_n)/\partial x.
\end{gathered} \tag{5}
$$

Для контроля точности схемы (5) на каждом шаге проверяется неравенство $||k_1^x|| \le \varepsilon$, где ε — требуемая точность расчётов; $||\cdot||$ — некоторая норма R^N. В отличие от методов типа Розенброка применительно к решению разрешённой задачи производная решения в (5) вычисляется приближённо. Поэтому при выборе величины шага интегрирования дополнительно проверяется неравенство $||D_n^{-1} F_n|| \le \varepsilon$.

Важной проблемой в моделировании ГС является обнаружение смены режимов. В библиотеку ИСМА включён алгоритм корректного обнаружения событий, в котором наряду с точностью и устойчивостью вычислений учитываются динамика событийной функции и односторонность событий, которая имеет место в большинстве практических задач. Оригинальный метод локализации точек переключения основывается на доказанной теореме о выборе шага интегрирования по формуле [10]

$$h_{n+1} = (\gamma - 1)\, g_n \Bigg/ \left(\frac{\partial g_n}{\partial x} \varphi_n + \frac{\partial g_n}{\partial t} \right), \quad \gamma \in (0, 1)\,.$$

Такой способ выбора шага с одновременным учётом величины шага по точности и устойчивости обеспечивает асимптотическое приближение к границе режима.

Для иллюстрации работы алгоритма корректного обнаружения событий приведём результаты моделирования простой гибридной системы — прыгающего с неупругим отскоком мячика. Режимное поведение зададим неявной системой дифференциальных уравнений из класса (4) в виде

$$y' - v = 0, \quad v' + a = 0, \quad pr:\ -y < 0,$$

где y — расстояние мячика от поверхности отскока; v — скорость падения мячика; a — ускорение свободного падения. В момент отскока $y = 0$ и $v = -\alpha v$, где α — коэффициент сохранения скорости. На рис. 4 представлены зависимости координаты мячика от времени, обработанные графическим интерпретатором GRIN среды ИСМА.

При расчётах без контроля динамики событийной функции (рис. 4, *а*) возникает существенная ошибка в обнаружении события. Это приводит к нарушению условия односторонности и, как следствие, ошибочному глобальному решению. Использование алгоритма для асимптотического приближения к границе режима (рис. 4, *б*) обеспечивает точное обнаружение момента смены режима. При приближении к поверхности $y = 0$ происходит уменьшение шага интегрирования, а при удалении от границы режима шаг

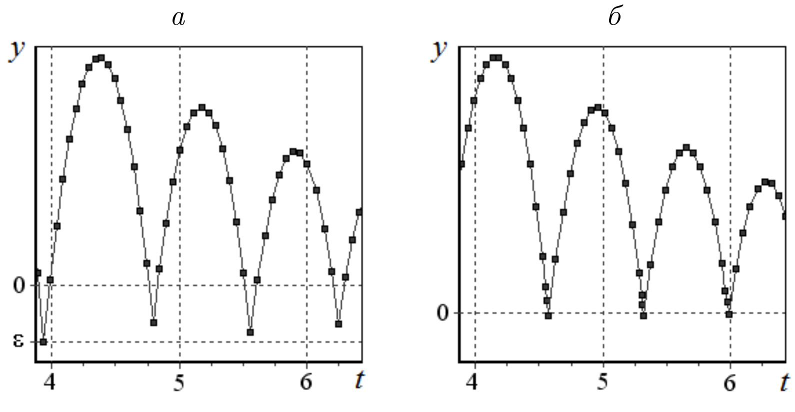

Рис. 4. Результаты моделирования: *а* — без учёта динамики событийной функции, *б* — с использованием алгоритма обнаружения событий

определяется по критериям точности расчётов и устойчивости численной схемы. Этим свойством представленный алгоритм детекции выгодно отличается от разработанных ранее алгоритмов без учёта динамики событийной функции [6].

Заключение

Инструментальная среда ИСМА с оригинальной библиотекой численных методов и предметно-ориентированными средствами символьного и графического описания моделей из класса (1), (2) и (4) адекватно настроена для исследования гетерогенных гибридных систем в довольно широком диапазоне математических моделей с учётом жёсткости и в условиях односторонних событий.

Список литературы

[1] Моисеев Н.Н. Математические задачи системного анализа. М.: Наука, 1981. 488 с.

[2] Яненко Н.Н., Карначук В.И., Коновалов А.Н. Проблемы математической технологии // Числ. методы механики сплошной среды. Новосибирск: ВЦ СО АН СССР. 1977. Т. 8, № 3. С. 129–157.

[3] Шорников Ю.В., Дружинин В.С., Макаров Н.А. и др. Инструментальные средства машинного анализа: Свидетельство об официальной регистрации программы для ЭВМ № 2005610126. М.: Роспатент, 2005.

[4] Шорников Ю.В., Дружинин В.С. Импорт данных в программной среде: Свидетельство об официальной регистрации программы для ЭВМ № 50200600117. М.: ВНТИЦ, 2006.

[5] Аносов В.Н., Кавешников В.М., Шорников Ю.В. Характеристики управляющих воздействий тягового электропривода автономного напольного транспортного средства // Науч. вест. НГТУ. 2005. № 3(21). С. 37–44.

[6] Новиков Е.А., Шорников Ю.В. Компьютерное моделирование жёстких гибридных систем. Новосибирск: Изд-во НГТУ, 2012. 451 с.

[7] Шорников Ю.В., Томилов И.Н. Программа языкового процессора с языка LISMA (Language of ISMA): Свидетельство об официальной регистрации программы для ЭВМ № 2007611024. М.: Роспатент, 2007.

[8] Brown P., Hindmarsh A. Matrix Free Methods in the Solution of Stiff Systems of ODEs. Lawrence Livermore National Laboratory, 1983. 38 p.

[9] Novikov E.A., Shornikov Yu.V., Tomilov I.N. et al. Modeling stiff hybrid systems of high dimension in ISMA // Proc. IASTED Intern. Conf. on Automation, Control and Information Technology (ACIT 2010). Novosibirsk, Russia: ACTA Press, 2010. P. 256–260.

[10] Shornikov Yu.V., Dostovalov D.N., Myssak M.S. Simulation of hybrid systems with implicitly specified modal behavior in the ISMA Environment // Универ. науч. журн. 2013. № 5. С. 171–178.

Поступила в редакцию 29 ноября 2013 г.